جامعة البعث — توزيع درجات مقرر الدوال محدودة التغير ① — الامتحان
كلية العلوم — الفصل (الدورة الإضافية) للعام $\frac{2015}{2016}$ — الدرجة 100
قسم الرياضيات — السنة الثالثة - رياضيات

ج 1 (40°)، (1) لتكن $f \in C[a,b]$ و $g \in BV[a,b]$ ولنثبت أن $K(x)$ ذات تغير محدود،
لنفرض $M = \max_{a \le x \le b} |f|$ عندئذ من أجل أي تجزئة P لـ $[a,b]$ يكون لدينا:

$$v(K,P) = \sum_{k=1}^{n} |K(x_k) - K(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\, dg(t) \right| \le$$
$$\le M \sum_{k=1}^{n} \bigvee_{x_{k-1}}^{x_k}(g) = M \bigvee_a^b (g)$$

وبما أن M عدد محدود، و g ذات تغير محدود فإن K دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$.

إكمال المبارهنة (حسب الوضع الصحيح):

$$\left| \int_a^b f\, dg \right| \le M \bigvee_a^b (g) \quad , \quad |S(f,g;P) - J| < \varepsilon \bigvee_a^b (g)$$

30

2) المجموعات القابلة للقياس لوبيغيا:

1) $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{3^n} \right] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

$E_n \in \mathcal{L}$ ($n \ge 1$) حسب مبرهنة (كونها فترات مغلقة) و $\lambda(E_n) = \frac{1}{3^n}$

وبما أن $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{L}$ وهي منفصلة مثنى مثنى و

$$\lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

2) $A_n = $ —— $(n \ge 1)$

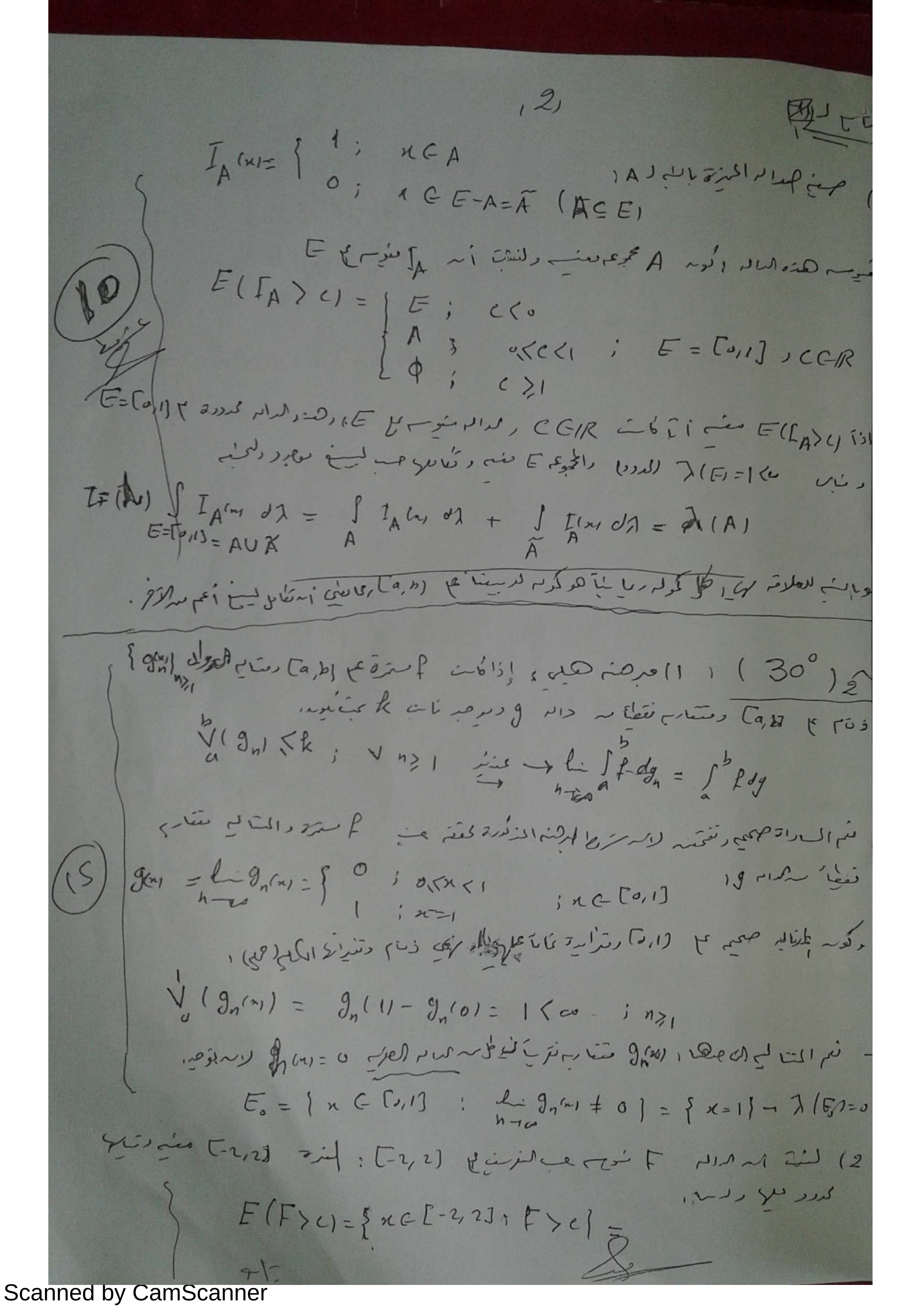
بالنسبة لـ A_n هي اتحاد فترات مغلقة $\Leftarrow \mathcal{L}$ وبالتالي $A_n \in \mathcal{L}$ ونهايتها،
$\lambda(A_n) = 2 < \infty$

2) $\mathbb{R} - \Phi \quad \Rightarrow \quad \mathbb{R}, \Phi \in \mathcal{L} \to \mathbb{R} - \Phi \in \mathcal{L}$

$$\lambda(\mathbb{R} - \Phi) = \lambda(\mathbb{R}) = \infty$$

وبما أن $\bigvee A_n$ (المنتهية) حسب ونهايته و $\lambda(A_n) < \infty$ و $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ($X = \mathbb{R}$) والتالي
أن نستنتج λ هو سيغما منتهية لأن $\lambda(\mathbb{R}) = \infty$ غير منتهية

يتبع ←



(2)

(1

10

ص‍يغ الدالة المميزة بالنسبة لـ A :

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 ; & x \in A \\ 0 ; & x \in E - A = \bar{A} \quad (A \subseteq E) \end{cases}$$

نفرض هذه الدالة ، وكون A مجموعة معينة ولنثبت أن I_A متوسعة على E

$$E(I_A > c) = \begin{cases} E ; & c < 0 \\ A ; & 0 \le c < 1 \\ \phi ; & c \ge 1 \end{cases} \quad ; \quad E = [0,1] , c \in \mathbb{R}$$

إذاً $E(I_A > c)$ مقيسة أياً كانت $c \in \mathbb{R}$ ، فالدالة مقيسة على E ، وهذه الدالة محدودة على $E = [0,1]$

ولدينا $\lambda(E) = 1 < \infty$ (محدود) والمجموعة E مقيسة وتكاملية حسب ليبيغ موجود ولنحسبه

$$I = \int_{E=[0,1]=A \cup \bar{A}} I_A(x) \, d\lambda = \int_A I_A(x) \, d\lambda + \int_{\bar{A}} I_A(x) \, d\lambda = \lambda(A)$$

ونلاحظ للعلاقة لها شكل كونه ريمانياً هو كونه لديناً على [a,b] ، يعني أن تكامل ليبيغ أعم من الآخر .

---

2) (30°) ، (1) مبرهنة هيلي ، إذا كانت f مستمرة على [a,b] ومتتالية الدوال $\{g_n(x)\}_{n \ge 1}$

ذات تغير محدود على [a,b] ومتقاربة نقطياً من دالة g ومحدودة بثابت k بحيث يكون :

$$\bigvee_a^b (g_n) \le k \; ; \; \forall n \ge 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \int_a^b f \, dg_n = \int_a^b f \, dg$$

15

ثم السؤال صحيح ، وتتحقق لأن شروط المبرهنة المذكورة محققة حيث f مستمرة والمتتالية متقاربة

نقطياً من الدالة g :

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x) = \begin{cases} 0 ; & 0 \le x < 1 \\ 1 ; & x = 1 \end{cases} \quad ; x \in [0,1]$$

وكون المتتالية صحيحة على [0,1] ومتزايدة تماماً على المجال فهي ذات تغير محدود (كلي) ،

$$\bigvee_0^1 (g_n(x)) = g_n(1) - g_n(0) = 1 < \infty \quad ; n \ge 1$$

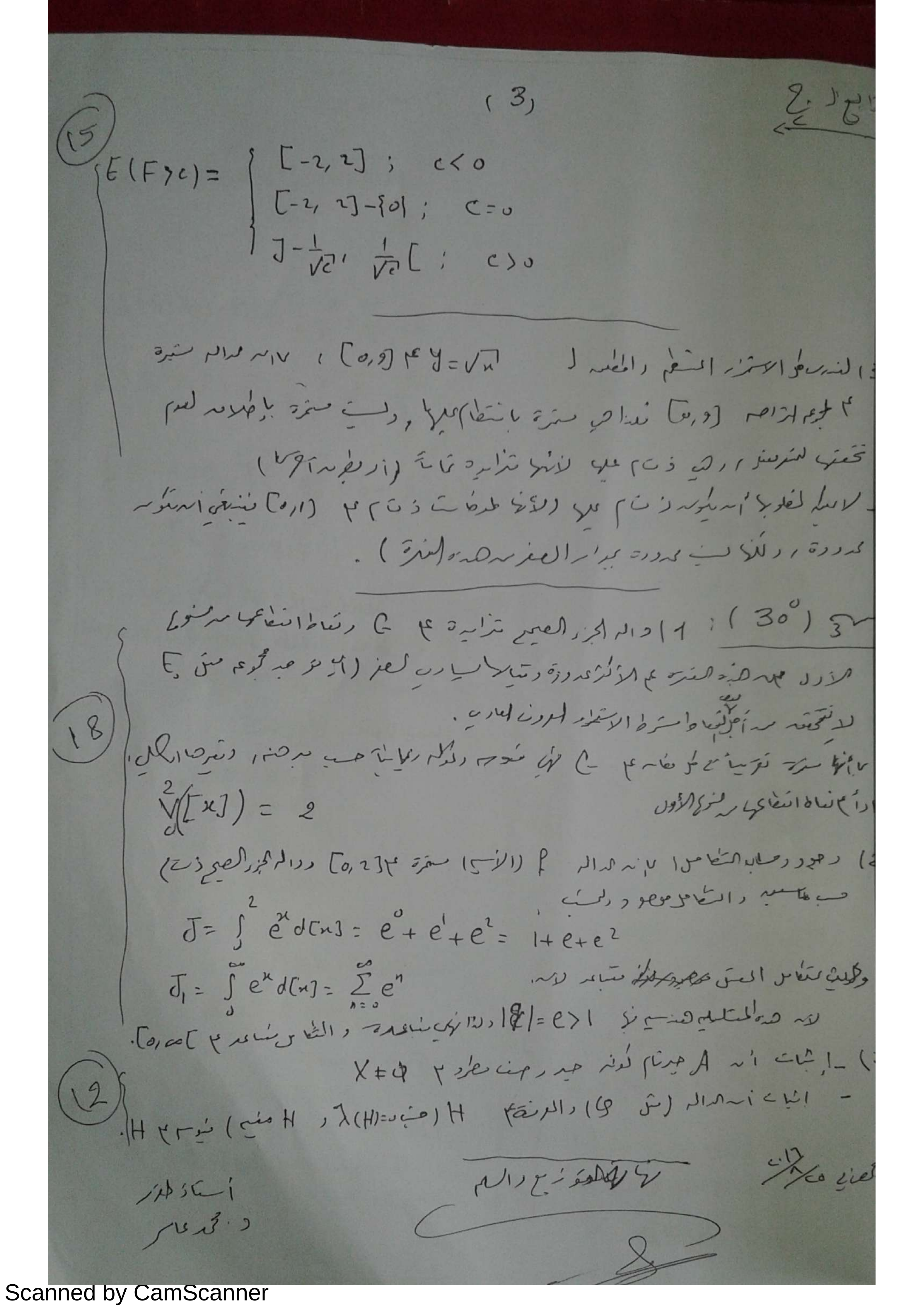
- ثم المتتالية المعطاة ، $g_n(x)$ متقاربة تقريباً في كل مكان من الدالة $g(x) = 0$ لأنه يوجد .

$$E_0 = \{ x \in [0,1] : \lim_{n \to \infty} g_n(x) \ne 0 \} = \{ x = 1 \} \to \lambda(E_0) = 0$$

2) لنثبت أن الدالة F متوسعة حسب الوسيط على [-2,2] : المستمرة [-2,2] مقيسة وتكاملية

محدود على ومن .

$$E(F > c) = \{ x \in [-2,2] , F > c \} =$$



تابع الحل ج

(15)

$$E(F\geq c)=\begin{cases}[-2,2] & ; c<0\\ [-2,2]-\{0\} & ; c=0\\ \left]-\frac{1}{\sqrt{c}},\frac{1}{\sqrt{c}}\right[& ; c>0\end{cases}$$

---

3) لنأخذ مثال الاستقرار المتعلق والمطلق لـ $y=\sqrt{x}$ على $[0,9]$ ، لأن هذه الدالة مستمرة على مجموعة التراص $[0,9]$ فهذا يعني مستمرة بانتظام عليها، ولكن مستمرة بإطلاق لعدم تحقق لشرط لبشتز، وهي ذات تغير محدود لأنها متزايدة تماماً (أو رطبة أو غير ...).

- الدالة لقلوب $\frac{1}{x}$ ليست ذات تغير محدود على المجال ذات 2 على $[0,1]$ فينبغي أن تكون محدودة، ولكنها ليست محدودة بجوار الصفر من هذه الفترة).

س3 (30°): 1) دالة الجزء الصحيح متزايدة على $\mathbb{R}$ ونقاط انقطاعها من النوع الأول من هذه الفترة على الأكثر معدودة ونقاط الانقطاع للعز (الأعداد الصحيحة مجموعة منتهية) لا نتحقق من أجل نقاط شرط الاستمرار المعروف العادي.

(18)

بالرغم أنها مستمرة تقريباً على كل فضاء على $\mathbb{R}$ فهي منقطعة والدالة نهائية حسب مبرهنة، وتعريفا التالي:

$$V_0^2([x])=2$$

لأن نقاط انقطاعها من النوع الأول

2) وجود وحساب التكامل لأن الدالة f (الأسية) مستمرة على $[0,2]$ ودالة الجزء الصحيح ذات تغير محدود، التكامل موجود ولدينا

$$J=\int_0^2 e^x\,d[x]=e^0+e^1+e^2=1+e+e^2$$

$$J_1=\int_0^{\infty} e^x\,d[x]=\sum_{n=0}^{\infty}e^n$$

والتكامل الغير محدود متباعد لأن هذه المتسلسلة هندسية لأن $|q|=e>1$ ولذا فهي متباعدة، والتكامل متباعد في $[0,\infty[$.

(12)

1) - إثبات أن A مغلقة لكونه حد ومن مطرد في $X\neq\phi$

- إثبات أن الدالة (ش φ) والمنتظمة H (مجموعة $\lambda(H)=0$ ، H مغلق) تنتمي H.

تمنياتي بالتوفيق والنجاح للجميع

أستاذ المادة
د. محمد عامر

الحاج ...